# Lösungshinweise für den Hauptwettbewerb am **25. Februar 2016**

Mathématiques SANS Frontières

## Aufgabe 1 – *Schokologisch* – 7 Punkte

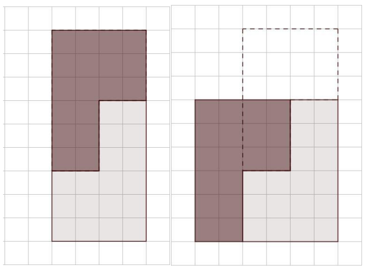
Wenn nur ein Kind keine heiße Schokolade will, ist die Antwort auf die Frage **nein**. **Anatole antwortet nicht mit nein**, also will er eine heiße Schokolade. Er weiß nicht, ob Benjamin und Chloé auch eine wollen, also antwortet er mit „**ich weiß nicht**“.

**Benjamin antwortet nicht mit nein**, also möchte auch er eine heiße Schokolade, aber er weiß nicht, was Chloé möchte. Er antwortet daher mit „**ich weiß nicht**“.

Chloé, die eine heiße Schokolade will, weiß aufgrund der Antworten, dass ihre Brüder auch eine wollen. Sie antwortet mit **ja**.

## Aufgabe 2 – *Quadratisch, praktisch, gut!* 5 Punkte

Man kann zuerst den Flächeninhalt des Rechtecks berechnen, um den Flächeninhalt des Quadrats und damit seine Seitenlänge zu erhalten.



## Aufgabe 4 – *Seite an Seite* – 5 Punkte

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D 5 | D 1 | D 2 | D 6 | A 6 | A 5 | A 1 | A 2 |
| B 5 | B 1 | B 2 | B 6 | C 6 | C 5 | C 1 | C 2 |
| B 8 | B 4 | B 3 | B 7 | C 7 | C 8 | C 4 | C 3 |
| A 8 | A 4 | A 3 | A 7 | D 7 | D 8 | D 4 | D 3 |

## Aufgabe 3 – *Fußballturnier* – 7 Punkte

*Blaue Flotte* hat mehr Tore geschossen als erhalten und ein Spiel verloren. Also hat die Mannschaft im anderen Spiel nicht unentschieden gespielt, sondern gewonnen. Der Gegner von *Seestern* in dem Spiel, das unentschieden ausging, war also Pinienwald. Da *Seestern* kein Tor erzielt hat, ging das Spiel 0:0 aus. Da *Seestern* kein Spiel gewonnen hat, hat *Pinienwald* gegen *Blaue Flotte* gewonnen. In diesem Spiel hat *Pinienwald* das Tor erhalten und die beiden Tore geschossen, die *Blaue Flotte* erhalten hat. *Blaue Flotte* hat insgesamt 3 Tore geschossen, von denen noch zwei für das Spiel gegen *Seestern* bleiben, das damit 2:0 ausging.

| Mannschaft | gewonnene Spiele | unentschiedene Spiele | verlorene Spiele | erzielte Tore | erhaltene Tore |
|---|---|---|---|---|---|
| *Blaue Flotte* | 1 | 0 | **1** | **3** | **2** |
| *Seestern* | 0 | **1** | **1** | **0** | 2 |
| *Pinienwald* | 1 | 1 | 0 | 2 | **1** |

## Aufgabe 5 – *Nur eine bleibt übrig* – 7 Punkte

Man betrachtet die Summe aller Zahlen von 1 bis n. Diese Summe wird nach jeder Operation um eins kleiner.
Für n = 10 beträgt die Summe zu Beginn 1+2+3+…+10 = 55. Nach 9 Operationen ist nur noch eine Zahl übrig, die Summe beträgt 55 – 9 = **46**.
Bei den Zahlen von 1 bis 100, erhält man das Ergebnis: (1+2+3+…+100) – 99 = 5050 – 99 = **4951**.

## Aufgabe 6 – *Guten Freunden gibt man ein Küsschen.* – 5 Punkte

Wenn man die Handschläge zwischen Begleitpersonen und Schülern zählt, erhält man $3 \cdot 24 = 72$, also bleiben $118 - 72 = 46$ Handschläge zwischen den Begleitpersonen bzw. zwischen den männlichen Schülern.

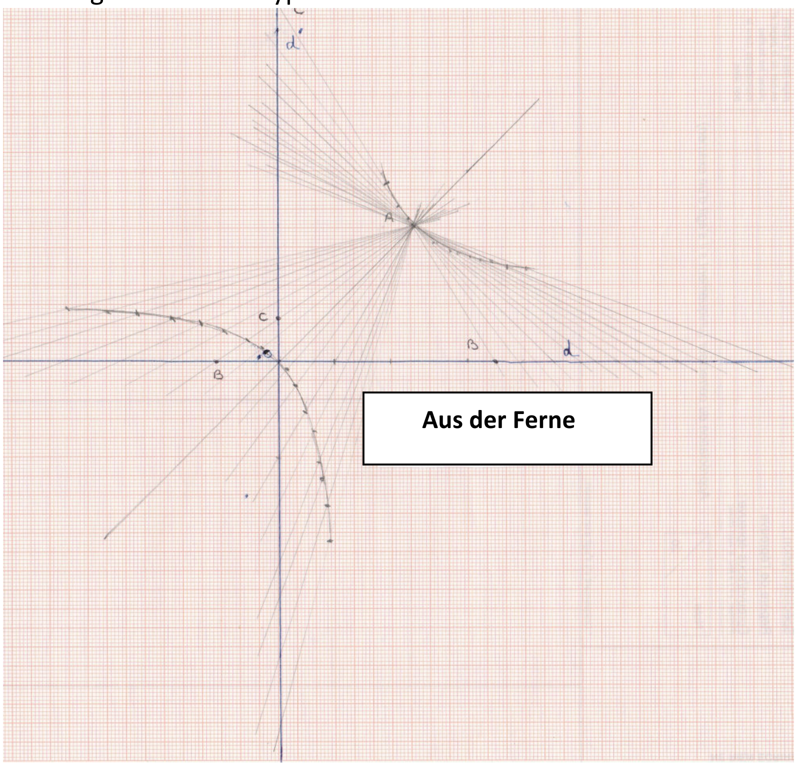
*Durch Ausprobieren können die Schüler auf die richtige Lösung kommen.*

Zum Beispiel ergeben sich für 9 männliche Schüler $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ Handschläge, und es bleiben 10 Handschläge für die Begleitpersonen, was nicht möglich ist.

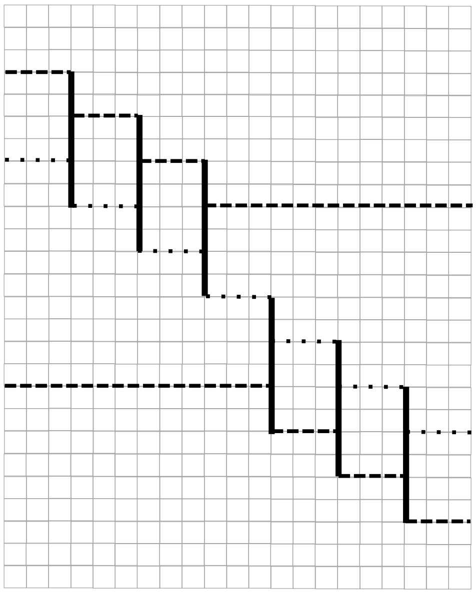
Es gibt also mehr männliche Schüler! Für 10 männliche Schüler ergeben sich 45 Handschläge. Es bleibt 1 Handschlag für die Begleitpersonen. Daraus ergeben sich zwei männliche Begleitpersonen. An dem Schüleraustausch haben also **14 Mädchen und eine weibliche Begleitperson** teilgenommen.

## Aufgabe 7 – *Aus der Ferne* – 7 Punkte

Es ergibt sich eine Hyperbel.



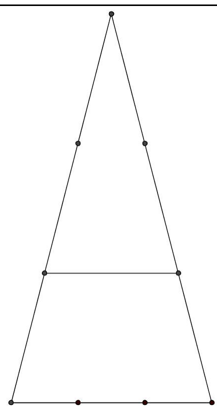
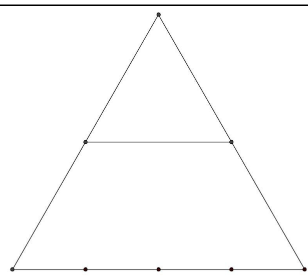

## Aufgabe 8 – *Kirigami* – 5 Punkte



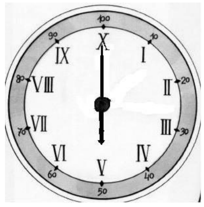
Man schneidet entlang der durchgezogenen Linien.
Entlang der gestrichelten Linien faltet man nach hinten und entlang der gepunkteten nach vorne.

## Aufgabe 9 – *Pyramide gesucht!* – 7 Punkte

Hier die beiden möglichen Lösungen:

| | | |
|---|---|---|
| **Seitenfläche** |  |  |
| | $b = 3 \cdot 8 = 24$ und $a = 3 \cdot 4 = 12$ <br> **Begründung**: Es gelten die Strahlensätze: <br> $12 : 8 = 24 : 16$ | $b = 2 \cdot 8 = 16$ und $a = 4 \cdot 4 = 16$ <br> **Begründung**: Es gelten die Strahlensätze: <br> $16 : 8 = 16 : 8$ |
| **Höhe der Pyramide** | $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{24^2 - \frac{12^2}{2}} = \sqrt{504} \approx 22{,}4$ | $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{16^2 - \frac{16^2}{2}} = \sqrt{128} \approx 11{,}3$ |

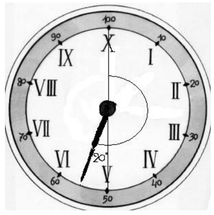
## <u>Aufgabe 10 – *Zeit für Revolution!* – 10 Punkte</u>



12 Uhr mittags ist genau die Mitte zwischen Mitternacht und Mitternacht.
Der Stundenzeiger steht dann auf 5, der Minutenzeiger auf 10.

13.20 Uhr ist 80 Minuten nach 12 Uhr mittags. 80 Minuten sind $\frac{1}{18}$ eines Tages (der aus $24 \cdot 60 = 1440$ Minuten besteht). Der Stundenzeiger bewegt sich in 80 Minuten also um $\frac{1}{18} \cdot 360° = 20°$ weiter.

Ein ganzer Dezimaltag hat 1000 Dezimalminuten. 80 Minuten unserer Zeit entsprechen also $\frac{1000}{18}$ Dezimalminuten oder $\frac{10}{18}$ Dezimalstunden.



Der große Zeiger bewegt sich in dieser Zeit um $\frac{10}{18} \cdot 360° = 200°$ weiter.

Er steht dann genau über dem Stundenzeiger.

# Klassenstufe 10

## <u>Aufgabe 11 – *Zwei Körperteile* – 5 Punkte</u>

Da die Höhe bei allen Körpern dieselbe ist, genügt es, die Grundflächen zu betrachten.
Sei x die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche des Ausgangskörpers. Dann gilt:
$x^2 - 400 < 400$ und $x^2 - 361 > 361$
Die ganzzahligen Lösungen sind **$x$ = 27 cm und $x$ = 28 cm**.

## <u>Aufgabe 12 – *Fünfeckskonstante* – 7 Punkte</u>

Sei $x$ die Seitenlänge des Fünfecks. Zur Flächenberechnung wird das Fünfeck in 5 Dreiecke aufgeteilt, indem jeder Eckpunkt des Fünfecks mit dem Punkt M verbunden wird. Es entstehen 5 Dreiecke mit der Grundseite x und den Höhen a, b, c, und d. Für die Fläche A des Fünfecks ergibt sich damit:

$$A = \frac{x \cdot a}{2} + \frac{x \cdot b}{2} + \frac{x \cdot c}{2} + \frac{x \cdot d}{2} + \frac{x \cdot e}{2} = \frac{x}{2} \cdot (a + b + c + d + e)$$

und $a + b + c + d + e = \frac{2 \cdot A}{x}$.

Die Fläche A und die Seitenlänge x des Fünfecks ändern sich nicht, wenn der Punkt M im Inneren des Fünfecks verschoben wird.
**Die Summe $a + b + c + d + e$ ist daher konstant und hängt nicht von der Lage des Punktes M ab.**

## <u>Aufgabe 13 – *Brüche falten* – 10 Punkte</u>

Im kleinen gefärbten Dreieck erhält man mit Pythagoras: $x^2 + (1/4)^2 = (1 - x)^2$ und somit ***x* = 15/32**.

Die beiden gefärbten Dreiecke sind ähnlich, da ihre Winkel gleich groß sind. Daher gilt mit den Strahlensätzen:

$y/(3/4) = (1/4)/x$ Also ***y* = 2/5**.

Um 1/5 der Seitenlänge des Blattes zu erhalten, muss man y nur noch halbieren, indem man zum Beispiel die rechte untere Ecke des Blattes auf die linke untere Ecke des großen Dreiecks faltet.

*Bemerkung: Mit dem dargestellten Verfahren kann man für jede natürliche Zahl n aus dem Bruch* 1/n *durch Falten den Bruch* 1/(n+1) erhalten. Der Nachweis lässt sich leicht erbringen, indem der oben aufgezeigte Rechenweg für 1/n statt 1/4 und 1/(n+1) statt 1/5 durchgeführt wird.