Mathematatik ohne Grenzen

ein internationaler Wettbewerb für Klassenstufe 10 und 11

Probewettbewerb 2002/2003

- ***Für jede Aufgabe, auch für die nicht bearbeiteten, ist ein gesondertes Lösungsblatt abzugeben.***
- ***Bei Aufgabe 3, 6, 10, 11, 12 und 13 muss die Lösung begründet oder erläutert werden.***
- ***Die Sorgfalt der Ausführung wird mitbewertet.***
- ***Auch Teillösungen werden berücksichtigt.***

Aufgabe 1
7 Punkte

Verdreht

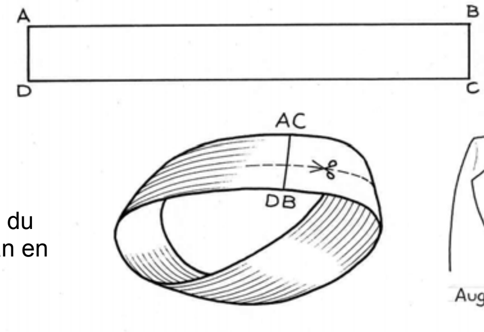
Die Lösung muss in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.

Le ruban de Möbius est présenté sur la figure. Il possède des propriétés géométriques surprenantes.

Pour fabriquer un ruban de Möbius avec une bande de papier rectangulaire ABCD, il faut raccorder le côté AD avec le côté BC... mais attention A doit coïncider avec C et B avec D.

Fabriquer un tel ruban. Colorier une face.
Que remarque-t-on ?

Tracer la ligne médiane du ruban. Découper le ruban en suivant cette ligne.
Que constate-t-on ?



August MÖBIUS (1790 - 1868)

El dibujo nos muestra la cinta de Möbius. Esta cinta tiene propiedades geométricas sorprendentes.

Para fabricar una cinta de Möbius con una tira de papel rectangular ABCD, hay que unir el lado AD con el lado BC… pero cuidado A debe coincidir con C y B con D.

Construya una cinta así. Coleree una cara.
¿ Qué observas ?

Trace la línea mediana de la cinta. Corte la cinta siguiendo esta línea.
¿ Qué constatas ?

The Möbius strip is presented in the figure. It has got amazing geometric properties.

To make such a Möbius strip with a rectangular band of paper ABCD, you must link side AD to side BC… but be careful A must coincide exactly with C and B with D.

Now cut out such a Möbius strip. Color one side.
What do you observe ?

Draw the median line of the strip. Cut the strip on that line. ***What do you notice ?***

Il nastro di Möbius è rappresentato in figura : possiede delle proprietà geometriche sorprendenti.

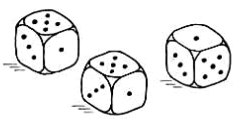
Per costruire un nastro di questo tipo con una striscia di carta rettangolare ABCD, si deve raccordare il lato AD con il lato BC…ma attenzione perché A deve coincidere con C e B con D.

Costruite un tale nastro. Coloratene una faccia.
Che cosa notate ?

Tracciate la mediana del nastro. Tagliate il nastro secondo questa linea. ***Che cosa osservate ?***

Aufgabe 2
5 Punkte

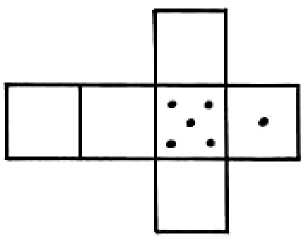
Würfelvarianten



Bei einem herkömmlichen Spielwürfel beträgt die Augensumme gegenüberliegender Seiten stets 7.

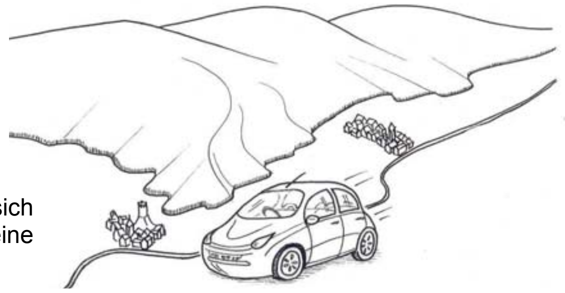
Wie die linke Abbildung zeigt, gibt es bei Einhaltung dieser Vorschrift verschiedene Möglichkeiten, die Augen auf den Würfelflächen anzuordnen.

Zeichne alle Möglichkeiten auf, welche sich beim Vervollständigen des abgebildeten Würfelnetzes ergeben können.



Aufgabe 3
7 Punkte

Ras' nicht so!



Vier Personen bilden eine Fahrgemeinschaft. Sie wechseln sich mit dem Fahren untereinander ab und legen bei jeder Fahrt eine Strecke von 24 km zurück.

Sylvie fährt ruhig und bedacht. Sie benötigt stets die gleiche Zeit. Christine braucht sechs Minuten weniger als Sylvie. Michel fährt zu schnell und braucht sechs Minuten weniger als Christine. Antoine fährt völlig unverantwortlich. Er braucht sogar sechs Minuten weniger als Michel und ist damit doppelt so schnell wie Christine.

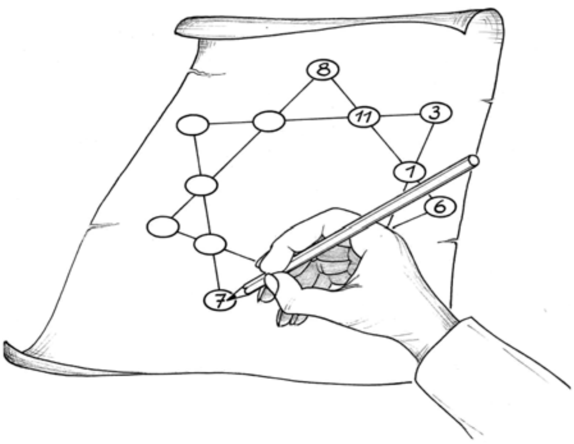
Berechne für jede der vier Personen die jeweilige Durchschnittsgeschwindigkeit.

Aufgabe 4
5 Punkte

Zahlenstern

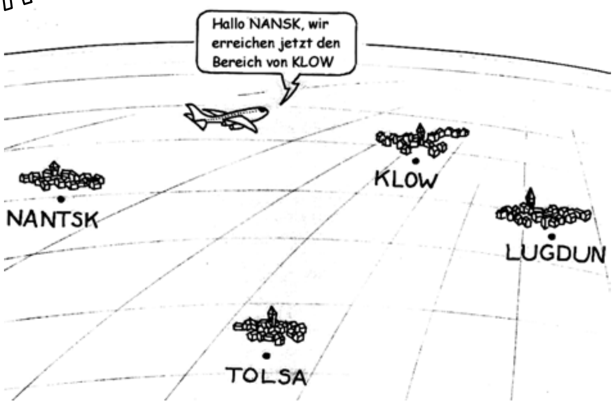
Maurice verkünstelt sich beim Zeichnen eines siebenzackigen Sterns. In seinen Eckpunkten ordnet er die Zahlen von 0 bis 13 so an, dass die Summe der vier Zahlen auf einer Linie jeweils gleich ist.

Vervollständige den Stern von Maurice und zeichne ihn in ansprechender Form auf das Antwortblatt.



Aufgabe 5
7 Punkte

Unter Kontrolle



Im fernen Syldavien wird der Luftraum von vier Kontrollzentren aus überwacht. Diese befinden sich in Nantsk, Klow, Lugdun und Tolsa.

Um die Arbeit der vier Zentren zu koordinieren, haben die syldavischen Behörden eine einfache Regelung getroffen:
Jedes Flugzeug im syldavischen Luftraum wird von dem Kontrollzentrum überwacht, das ihm am nächsten liegt.

Entfernungen: KT = 600 km, KL = 350 km, NK = 350 km, TL = 400 km und NT = 450 km.

Zeichne auf dem Lösungsblatt die vier Kontroll-zentren ein (1 cm $\hat{=}$ 50 km).

Markiere farbig die vier Überwachungsbereiche, nachdem du zuvor ihre Grenzen konstruiert hast.

Aufgabe 6
5 Punkte

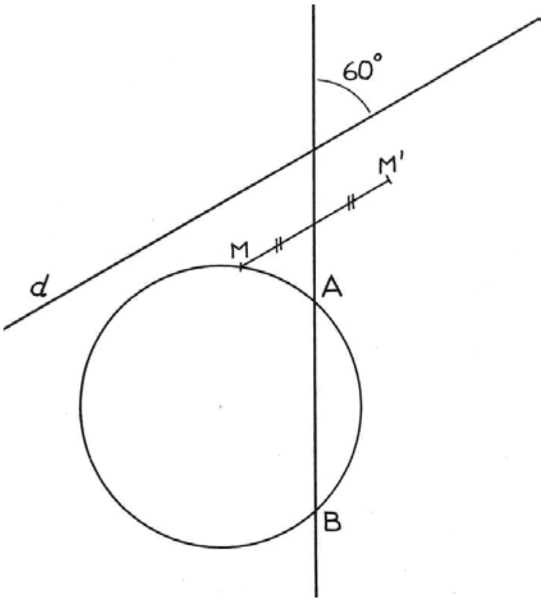
Eine Frage des Alters

Hektor ist zur Zeit fünfzig Jahre alt. Er erfährt, dass die mittlere Lebenserwartung in seinem Land zur Zeit 78 Jahre beträgt und jährlich um zwei Monate zunimmt.

In welchem Jahr entspricht das Alter von Hektor der Lebenserwartung in seinem Land, falls sich diese weiterhin wie beschrieben entwickelt und Hektor dies noch erlebt?

Aufgabe 7
7 Punkte

Schieflage



"Die Achsenspiegelung wird langsam langweilig!", beklagt sich Jacques. Er hat genug davon, dass die Verbindungslinie zwischen Ur- und Bildpunkt immer orthogonal zur Spiegelachse sein soll. Warum nicht mal ein anderer Winkel?

Immerhin hält er sich noch an die folgende Regel:

Die Verbindungsstrecken zwischen Ur- und Bildpunkt sind parallel zu einer Geraden d und werden von der Spiegelachse halbiert.

Eine solche Abbildung heißt Schrägspiegelung.

Übertrage die obenstehende Figur vergrößert auf das Lösungsblatt

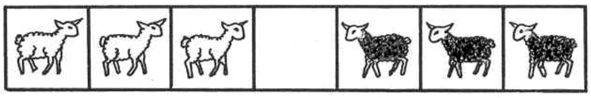
Konstruiere punktweise das Bild des Kreises bei dieser Schrägspiegelung.

Aufgabe 8
5 Punkte

Bocksprünge

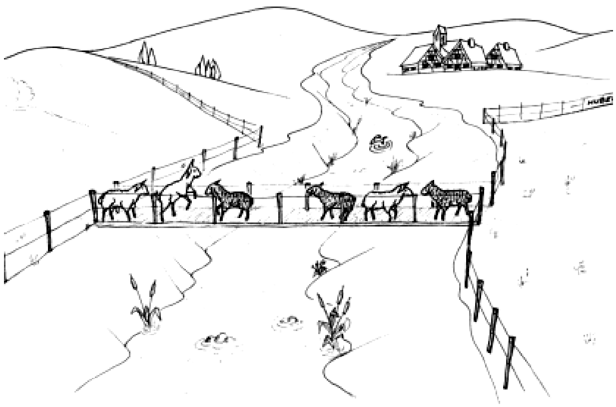
Die drei schwarzen Schafböcke in den quadratischen Kästchen sollen ihren Platz mit den drei weißen Böcken tauschen. Dabei sind einem Schaf nur folgende **Vorwärtsbewegungen** erlaubt:

- Zug auf ein vor ihm liegendes freies Kästchen
- Überspringen eines vor ihm stehenden Tieres auf ein freies Kästchen



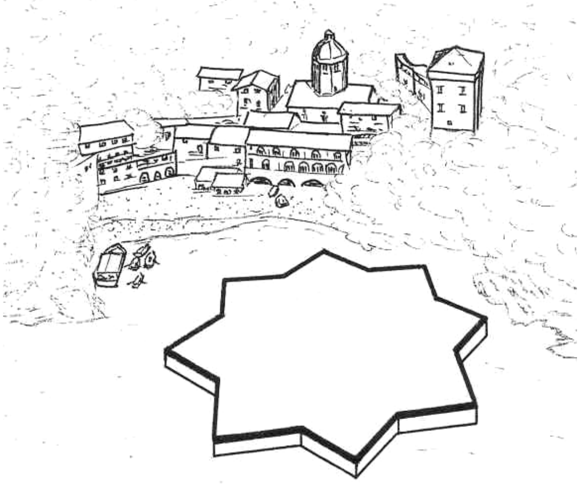
Am Ende sollen die schwarzen Böcke links und die weißen Böcke rechts stehen und durch ein leeres Kästchen in der Mitte getrennt sein.

Gib eine Folge von Bewegungen an, welche diesen Austausch bewerkstelligt.



Aufgabe 9
7 Punkte

Ligurisches Pflaster



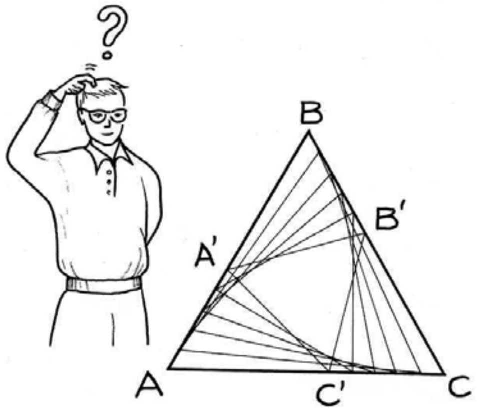
Bei Ausgrabungen in der Umgebung von Genua haben Archäologen in der Abtei San Fruttuoso einen Fliesenboden freigelegt. Er besteht aus zwei Arten von Kacheln, welche in gleicher Anzahl lückenlos aneinandergelegt sind.

Die Kacheln der einen Sorte haben die Form eines regelmäßigen achtzackigen Sterns. Man erhält ihn, wenn man zwei Quadrate von 1 dm Kantenlänge so übereinander legt, dass ihre Diagonalenschnittpunkte zusammenfallen. Die Kacheln der anderen Sorte füllen die Zwischenräume so aus, dass eine lückenlose Parkettierung entsteht. Beide Arten von Kacheln haben den gleichen Umfang.

Klebe auf das Lösungsblatt eine lückenlose Anordnung von sechs Kacheln, drei von jeder Sorte, im Maßstab 1:2.

Aufgabe 10
10 Punkte

Dreiecksgeschicht

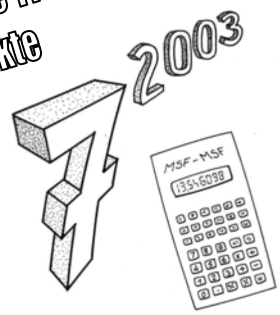


Das gleichseitige Dreieck ABC hat 8 cm Seitenlänge. Die Punkte A', B' und C' liegen jeweils auf den Seiten AB, BC und AC. Dabei gilt $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$.

Wie lang muss die Strecke AA' sein, damit die Dreiecke AA'C', BB'A' und CC'B' in A', B' bzw. C' rechtwinklig sind? Beschreibe dein Vorgehen und überprüfe die Lösung.

nur für Klassenstufe 11

Aufgabe 11
5 Punkte



Der Zweck heiligt die Mittel

Marc spielt mit seinem Taschenrechner. Er behauptet, dass er bei beliebigen Potenzen von 7 die beiden letzten Ziffern berechnen kann.

Wie lauten die beiden letzten Ziffern von 7^{2003} ? Erkläre, wie man diese Ziffern findet.

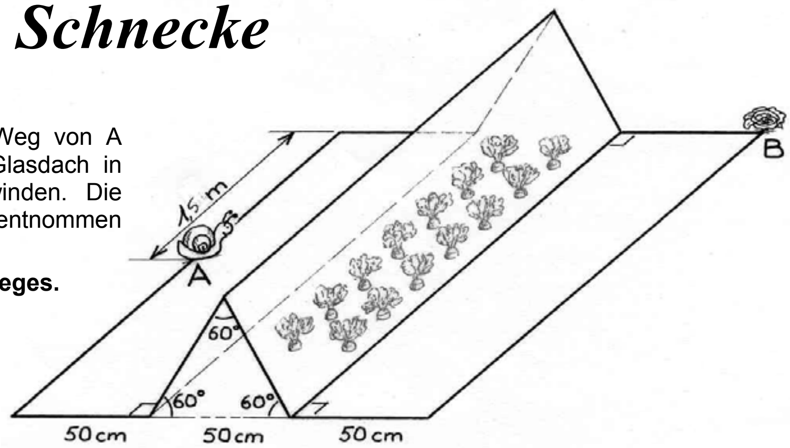
Aufgabe 12
7 Punkte

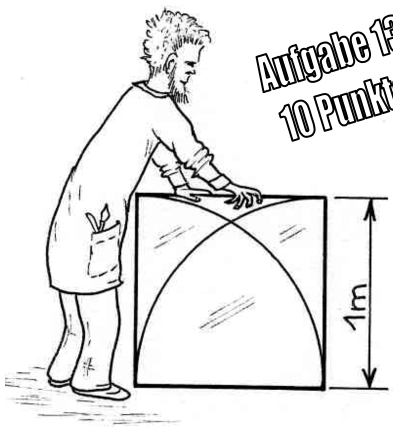
Hungrige Schnecke

Eine Schnecke will auf dem kürzesten Weg von A nach B. Auf ihrem Weg muss sie ein Glasdach in Form eines dreiseitigen Prismas überwinden. Die Abmessungen können der Abbildung entnommen werden.

Berechne die Länge dieses kürzesten Weges.

Erkläre, wie du vorgegangen bist.





Aufgabe 13
10 Punkte

Vorsicht Glas

Ein quadratisches Fenster von 1m Seitenlänge soll so verglast werden, wie es im Bild dargestellt ist. Die Glasflächen werden von zwei Viertelkreisen begrenzt, deren Mittelpunkte in den beiden unteren Quadratecken liegen.

Bestimme den Flächeninhalt jeder der vier Glasflächen.